TITLE:

非均質媒質における熱対流 (輻射流体力学の運動方程式研究会報告集)

AUTHOR(S):

山口, 七郎

CITATION:

山口, 七郎. 非均質媒質における熱対流 (輻射流体力学の運動方程式研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1968, 43: 23-31

ISSUE DATE:

1968-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/107668

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
43巻 1968年 23-31

非均質媒質における熱対流

岐阜大. 工. 山口七郎

星の外層において生じる対流の特徴を知ることを目標として対流の方程式を検討する。媒質として，重力のため垂直方向に積層し，温度T，密度ρ，圧力p，などが高さと共に変化する平面層を考える。このような層において起る熱対流が，実験室において二枚の平行板の間に入れられた流体において生じる熱対流，とどのようにちがうかを知るのが目的である。方程式を下に列挙する。但し，回転によるコリオリ力，磁場，粘性，は考えない。媒質を構成するガスの電離，解離は考慮する。

(1) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u = 0 ,$$

(2) $$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho \frac{du}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho g ,$$

2.1

(3) $$\rho \frac{d\epsilon}{dt} + p\,\mathrm{div}\,u = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dP}{dt}$$

$$= \rho C_p \frac{dT}{dt} - E\frac{dP}{dt} = Q = -\mathrm{div}\,\mathbb{F}$$

記号の説明.

$h = \epsilon + p/\rho$,　ガス1グラム当りのエンタルピー

$C_p \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$,　$E \equiv 1 - \rho\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T$

Q [erg / cm^3·sec],　輻射エネルギーの入量

$\mathbb{F}$ [erg / cm^2·sec],　radiation flux vector

媒質が輻射に関して不透明な場合

$\mathbb{F} = -K\,\mathrm{grad}\,T$,　($K$, radiative conductivity)

(4) $$P = \frac{R}{\mu}\rho T$$,　(μ, ガスの平均分子量)

電離の影響で、C_p, E, μ は T, P の関数である。

KもT, Pの関数で、$T^\alpha \cdot p^\beta$ の形で近似することもある。

対流の存在しない初期の状態は、上の方程式系で $u = 0$ とした場合で、輻射だけでエネルギーが運ばれている状態である。すなわち (2) と (3) から

$$\frac{dp}{dz} = \rho g \qquad (z\text{ 軸下向き})$$

$$\mathbb{F} = (0,\ 0,\ -F), \quad (K\frac{dT}{dz} = F,\ \text{正の定数})$$

これと状態方程式(4)から, $T_0(z)$, $\rho_0(z)$, $p_0(z)$ が求まる。 特に, $K=$ 一定, とし, 電離を考えない場合は polytropic model と呼ばれる。

$$T_0 = \beta_0 z, \qquad \rho_0 = A z^m, \qquad p_0 = \frac{R\beta_0 A}{\mu} z^{m+1}$$

$$\beta_0 = F/K, \quad \text{温度勾配}$$

$$m = \frac{\mu g}{R\beta_0} - 1 = \frac{H_T}{H}, \quad \text{polytropic index}$$

その他, 静止状態を表わすのに, 次の様な量を使う。

$$H_p \equiv \frac{p_0}{p_0'} = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{RT_0}{\mu g} = \frac{c^2}{\gamma g} = \frac{z}{m+1}$$

$$H \equiv \frac{\rho_0}{\rho_0'} = \frac{z}{m}, \quad \text{density scale height}$$

$$H_T \equiv \frac{T_0}{T_0'} = \frac{T_0}{\beta_0} = z, \quad \text{温度の scale height}$$

$$c^2 \equiv \gamma\frac{p_0}{\rho_0} = \gamma g H_p, \quad \text{音速}$$

$$\beta_s \equiv \beta_0 - \beta_{AD} = \beta_0 - \frac{Eg}{C_p} = \beta_0 \left\{ 1 - (m+1) \nabla_{AD} \right\}$$

星の外層において，$\nabla_{AD} \equiv (d\ln T/d\ln P)_{AD} = ER/\mu C_p$ は電離のため 0.4 から 0.1 位迄さがる。$\beta_s(z)$ は superadiabatic gradient と呼ばれ，これが正である領域（$z_0 < z < z_0 + d$，とする）は熱的に不安定でそこに熱対流が起る。従って，m の値としては $-1 < m < 9$ を考えればよい。

熱対流の場は，水平面内における P, ρ, T の変動と密接に関連している。P, ρ, T が水平面内で一定ならば対流は存在しない。そこで対流の記述には，P, ρ, T を，水平面内での平均とそれからのずれに分けて考える。

$$T = \overline{T}(z, t) + T'(x, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

熱対流の理論的な取扱いを分類すると次の様になる。

I．線型理論

静止状態に微小な disturbance を与え，その初期の成長（$\sim e^{\sigma t}$）を調べる。u, P', ρ', T' が微小な初期のみを考えるので，$\overline{T}$ は $T_0(z)$ のままである。成長率及び初期の対流の様子が実験室的な場合とどうちがうかを見

ることによって，ある程度，非均質性の効果を調べることができる（文献 Ia）。

その他，$\sigma = 0$ となるような特別な初期状態を求める問題があるが，この場合には方程式に dissipation の項（粘性と輻射）を入れる必要がある。（文献 Iб）。

Ⅱ．初期値問題

初期の静止状態に disturbance を与え，その時間的変化を追跡し，時間を十分長くとって最終の状態を求める。この場合は $\bar{T} = \bar{T}(z, t)$, etc.　（文献 Ⅱ）。

Ⅲ．定常解または統計的に定常な解を求める問題。

現在の状態（最終状態）のみを問題にする。$\bar{T} = \bar{T}(z)$ etc.　非線型ダ円型方程式の境界値問題であり，実験室的対流でレーリー数の小さい場合しか解かれていない。（文献Ⅲa）乱流的対流の統計的な取扱いは，一様乱流の場合との類推によって試みられている。（文献Ⅲб）。

Ⅱの場合は一般に，平均量（$\bar{T}$, $\bar{p}$, $\bar{\rho}$, $\bar{u}$）の方程式と，変動量（T', p', ρ', u'）の方程式の分離が面倒になるので，平均量が t によらない Ⅰ, Ⅲ の場合に分離を試みる。

線型方程式

$$(1')\quad \underline{\underline{\frac{\partial \rho'}{\partial t}}} + \rho_0 \, \mathrm{div}\, u + \frac{d\rho_0}{dz} \cdot w = 0$$

$$(2')\quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \mathrm{grad}\, p' + \rho' g$$

$$(3')\quad \rho_0 C_p \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \beta_s w \right) - \underline{\underline{\frac{\partial p'}{\partial t}}} = Q' \; (= K \nabla^2 T')$$

$$(4')\quad \underline{\underline{\frac{p'}{p_0}}} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}$$

または，相対変動，

$$\chi \equiv \frac{\rho'}{\rho_0}, \quad \Pi \equiv \frac{p'}{p_0}, \quad \Theta \equiv \frac{T'}{T_0}$$

を使うと少なくとも線型方程式に関しては取扱い易くなる。上の方程式及び以下では，電離の効果は，$\beta_S(z)$ の中にのみ考慮されている。

$$(1'')\quad \underline{\underline{\frac{\partial \chi}{\partial t}}} + \mathrm{div}\, u + \frac{w}{H} = 0$$

$$(2'')\quad \frac{\partial u}{\partial t} = - g H_p \cdot \mathrm{grad}\, \Pi - \Theta g$$

$$(3'')\quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \underline{\underline{\nabla_{AD} \frac{\partial \Pi}{\partial t}}} + \frac{\beta_S}{T_0} w = \frac{Q'}{C_p \rho_0 T_0}$$

(4″) $\underline{\underline{\Pi}} = \chi + \Theta$

上の方程式系で，下線のある項は実験室的対流（$H, H_T, H_p \gg d$）において無視される（文献IVa）。また $\partial\rho'/\partial t$ の項は，地球大気における対流（$H, H_T, H_p \approx d$，$\beta_s \approx 0$）において無視される（文献IV-b）。そこで一般に，$H, H_T, H_p \ll d$ である星の対流層の場合に，これらの近似が拡張できるかどうかを検討する。

今 disturbance が adiabatic（$Q' = 0$）として，その水平波数 k を与えて，上の方程式を解く。垂直方向の速度のみの方程式にすると

(5)
$$\frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{1}{H} + \frac{f}{1+f}\frac{1}{H_T}\right)\frac{d}{dz} + \left(\frac{N^2}{\alpha^2} - 1\right)(1+f)k^2 - \left(\frac{1}{H} + \underline{\underline{\frac{\beta_s}{T_0}}}\right)\left(\frac{1}{1+f}\frac{1}{H_T} + \frac{\beta_s}{T_0}\right) = 0 ,$$

$$w = e^{\alpha t} F(x, y)\, \overline{W}(z) , \quad (F_{xx} + F_{yy} = -k^2 F)$$

上の式で f 及び下線の部分は $\partial\rho'/\partial t$ の項に由来する。したがって，この項が無視できる条件は，

(A)
$$f \equiv \frac{\alpha^2}{g H_p k^2}(1 - \nabla_{AD}) \ll 1$$

(B) $\quad \dfrac{\beta_s H}{T_0} \ll 1, \quad \left(\dfrac{1-(m+1)\nabla_{AD}}{m} \ll 1 \right)$

星の対流層においては、$H \approx H_T$ $(m \approx 1)$ であるので、近似(A)(B)のもとに(5)は次の様になる。

$$(5') \qquad \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{H}\frac{d}{dz} + \left(\frac{N^2}{\alpha^2} - 1\right)k^2 - \frac{1}{HH_T} = 0$$

ここで

$$N^2 \equiv \frac{\beta_s}{T_0} g \qquad [\mathrm{sec}^{-2}]$$

Polytropic model では、N が一定のとき(5')の解は、ベッセル関数で表わされ、α は次のような形で求まる。

$$\frac{\alpha^2}{N^2} = \frac{k^2 d^2}{k^2 d^2 + \Phi^2}$$

$\Phi(m, z_0/d)$ は π より大きい数で、例えば $m=2$ のとき π $(z_0 \gg d)$ から、約 4.5 $(z_0 \ll d)$ までの数である。

条件(A)において、H_p $(\propto z)$ は上層へ行くにしたがって小さくなるので、対流層が表面 $(z \simeq 0)$ 近くまである場合、この条件は上層では成立たなくなる。

非線型方程式においても、$\partial\rho'/\partial t$ と $u \cdot \mathrm{grad}\,\rho'$ は次元的に同じであるので、同様な議論ができると考えられる。

31

文　献

Ia). Skumanich, A., Ap. J., 121, 408, '55.

Böhm, K. H. and Richter, E., Zs. Ap. 50, 79, '60.

Spiegel, E. A., Ap. J., 139, 959, '64.

Ib). Unno, W., Kato, S. and Makita, M., Publ. Astr. Soc. Japan, 12, 192, '60.

Kato, S., ibid., 13, 410, '61.

Spiegel, E. A., Ap. J., 141, 1068, '65.

Yamaguchi, S., Publ. A. S. Japan, 19, 20, '67

II) Deardorff, J. W., J. Atmos. Sci., 21, 419, '64.

Fromm, J. E., Phys. Fluids, 8, 1757, '65.

IIIa) Nakagawa, Y., ibid., 3, 82, '60.

IIIb) Ledoux, P., Schwarzschild, M. and Spiegel, E. A., Ap. J. 133, 184, '61.

Spiegel, E. A., IAU Symp. No. 28 (ed. by Thomas, R. N., Academic Press, '67), p. 347.

IVa) Spiegel, E. A. and Veronis, G., Ap. J. 131, 442, '60.

IVb) Ogura, Y. and Phillips, N. A., J. Atmos. Sci., 19, 173, '62.